BBMerlion

Permutations, Combinations, and Probability

Jadug Norach Agna Parusa

PERMUTATIONS & COMBINATIONS

Objektif

✓Mengenal konsep (${}^{n}P_{r}$) dan (${}^{n}C_{r}$)

✓Menyusun objek dalam garis atau lingkaran

✓Melibatkan kasus repetisi & restriksi

Permutation

An ordered arrangement

Permutasi:

banyaknya cara menyusun objek dengan memperhatikan urutan

Formula

$$^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

n = banyaknya objek yang tersedia

r = banyaknya objek yang disusun

Example 1a

Soal

Ichsan memiliki kumpulan balok angka yang bertuliskan 1 sampai 9. Berapa banyak cara dia menyusun bilangan 3 digit dengan balok-balok tadi?

Solusi

$$^{9}P_{3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \; x \; 8 \; x \; 7 \; x \; 6!}{6!} = 504 \text{ cara}$$

Note : 234 $\not\Leftrightarrow$ 432

$\underline{2}\ \underline{3}\ \underline{\ \ } \leftarrow$ 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Combination

An unordered arrangement

Kombinasi:

banyaknya cara menyusun objek tanpa memperhatikan urutan

Formula

$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

n = banyaknya objek yang tersedia

r = banyaknya objek yang disusun

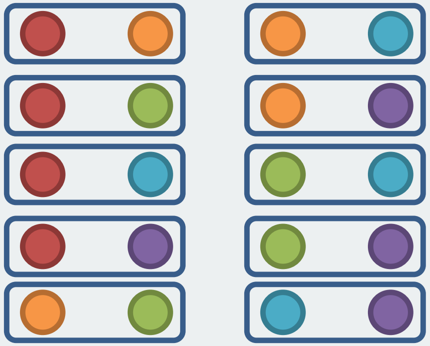
Example 1b

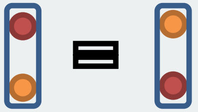
Soal

Dila mengambil 2 bola sekaligus dari sebuah kantong yang berisi banyak bola. Mereka berwarna merah, kuning, hijau, biru, dan ungu. Berapa banyak kombinasi warna bola yang mungkin terambil?

Solusi

$$ {}^{5}C_{2} = \frac{5!}{(5-2)!\ 2!} = \frac{5\ x\ 4\ x\ 3!}{3!\ x\ 2} = 10 \text{ cara} $$



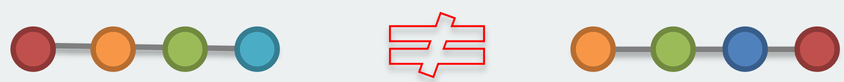
Note : 

Line and Circle Arrangement

Banyaknya cara mengurutkan n-objek dalam satu garis adalah

Line Arrangement

n!

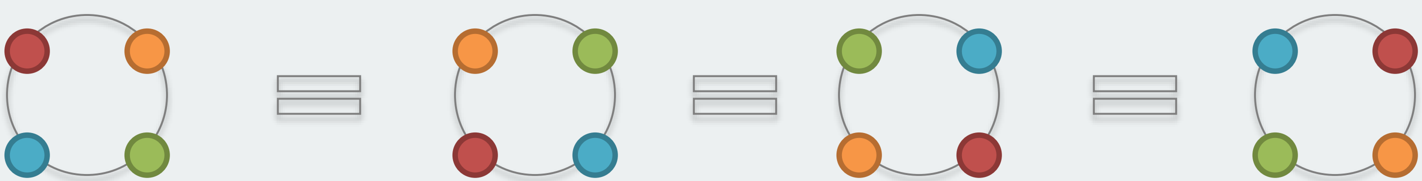


Banyaknya cara mengurutkan n-objek dalam sebuah lingkaran

Circle Arrangement

(n-1)!

Note : don't over count!



Example 2

Soal

Berapa banyaknya cara mengatur posisi duduk Ali, Bella, Chiko, dan Deka di dalam

a) Kursi berjajar;

b) Meja melingkar.

Solusi

a) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

b) Asumsikan Ali memiliki tempat duduk tetap, kita hanya perlu mengatur posisi duduk 3 orang di dalam “kursi berjajar”

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Repetition and Restriction

Sebelumnya, pembahasan kita hanya melibatkan kasus sederhana: tidak ada **repetisi (pengulangan)** maupun **restriksi (batasan)**.

Formula umum **tidak selalu berlaku** disini. Setiap kasus bisa jadi memiliki pendekatan solusi yang berbeda-beda.

Example 3a

Permutation with Repetition

Soal

Ada berapa banyak cara menyusun password sepanjang 4 digit hanya dengan menggunakan alfabet A-Z?

Solusi

Berbeda dengan **Example 1a**, permutasi disini membolehkan repetisi. Sehingga

$^{26}P_{4\,(rep)} = 26 \times 26 \times 26 \times 26 = \underline{\mathbf{26^4}}$

Formula

$^{n}P_{r\,(rep)} = n^r$

Example 3b

Combination with Repetition

Soal

Pasha memiliki 4 mangkuk es krim dengan rasa melon, jeruk, coklat, dan vanila. Jika dia boleh mengambil 2 sendok, tentukan banyaknya variasi es krim yang bisa dia dapatkan.

Solusi

Berbeda dengan **Example 1b**, kombinasi disini membolehkan repetisi, sehingga

Formula

$$^{n}C_{r\ (rep)} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\ r!}$$

$$^{4}C_{2\ (rep)} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5\ x\ 4\ x\ 3!}{3!\ x\ 2} = 10$$

Example 3c

Permutation with Restriction

Soal

Tentukan banyaknya cara menata ulang kata “AMIGO”, jika

a) Tidak ada syarat;

b) Huruf kedua dan keempat selalu konsonan.

Solusi

a) ${}^{5}P_{5}$ = 5! = **120 cara**

b) Kasus tipe ini tidak memiliki formula baku, sehingga penyelesaiannya menggunakan penalaran dan logika.

Huruf vokal → (_) _ (_) _ (_) → ${}^{3}P_{3}$ = 3! = 6 cara

Huruf konsonan → _ (_) _ (_) _ → ${}^{2}P_{2}$ = 2! = 2 cara

Total = 6 x 2 = **12 cara**

Example 3d

Combination with Restriction

Soal

Timnas Inggris mempunyai 15 pemain. Tentukan banyaknya cara memilih 11 pemain jika

a) Hart, Gerrard, dan Rooney harus dimainkan;

b) Welbeck sedang cedera dan Terry terkena sanksi kartu.

Solusi

Tidak ada formula baku untuk kasus tipe ini, penyelesaiannya hanya menggunakan penalaran dan logika.

a) $$ {}^{12}C_8 = \frac{12!}{(12-8)!\,8!} = \frac{12 \; x \; 11 \; x \; 10 \; x \; 9 \; x \; 8!}{4 \; x \; 3 \; x \; 2 \; x \; 8!} = 495 \; cara $$

b) $$ {}^{13}C_{11} = \frac{13!}{(13-11)!\,11!} = \frac{13 \; x \; 12 \; x \; 11!}{2 \; x \; 11!} = 78 \; cara $$

PROBABILITY

Objektif

✓Mengenal konsep penjumlahan dan perkalian dalam peluang

✓Membedakan “kejadian saling lepas” dan ‘kejadian saling bebas”

✓Menghitung peluang bersyarat dan menggunakan diagram

Probability

Peluang:
ukuran kemungkinan terjadinya suatu kejadian

Formula

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

n(A) = banyaknya cara kejadian A terjadi

n(S) = banyaknya hasil yang mungkin terjadi

Operasi (**+**) : jika terdapat kata kunci “**atau**”

Operasi (**x**) : jika terdapat kata kunci “**dan**”

Example 4

Soal

Terdapat 2 bola merah, 3 kuning, dan 5 hijau dalam sebuah kantong. Jika 2 bola diambil bersamaan, berapa peluang yang terambil adalah bola merah dan kuning atau bola hijau semua?

Solusi

$n(A) = n(MK) + n(H) \rightarrow n(MK) = {}^{2}C_{1} \times {}^{3}C_{1} \quad | \quad n(H) = {}^{5}C_{2}$

$n(S) = {}^{10}C_{2}$

$P(A) = [\ n(MK) + n(H)\ ] / n(S)$

$= (2x3 + 10) / 45$

$= \underline{\mathbf{16/45}}$

Independent Events

<u>Kejadian saling bebas</u>:

Jika hasil kejadian yang satu tidak mempengaruhi hasil kejadian lain

P(A and B) = P(A n B) = P(A).P(B)

Contoh:

Mendapatkan ‘kepala’ lalu ‘ekor’ dalam pelemparan koin dua kali

<u>Kejadian tidak saling bebas</u>

Contoh:

Mendapatkan kartu ‘raja’ kemudian kartu ‘hati’ pada pengambilan dua kartu bergantian, dari satu set kartu Bridge (52 kartu)

Example 5a

Soal

Dua buah kartu diambil bergantian (tanpa dikembalikan) dari satu set kartu Bridge. Tentukan peluang terambilnya kartu ‘sekop’ pada pengambilan pertama, dan kartu ‘merah’ pada pengambilan kedua.

Solusi

Kasus ini merupakan “kejadian saling bebas”, sehingga

P(sekop dan merah) = P(sekop) x P(merah)

= (13/52) x (26/51)

= **13/102**

Mutually Exclusive Events

Kejadian saling terpisah:

jika dua kejadian tidak mungkin terjadi bersamaan → **P(A n B) = 0**

$$\boxed{P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Contoh:

Kejadian "mendapat 3" dan "mendapat 6" dalam pelemparan dadu

Kejadian tidak saling terpisah

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Contoh:

Kejadian "mendapat 5" dan "mendapat bilangan ganjil", keduanya bisa terjadi bersamaan (karena 5 termasuk bilangan ganjil)

Example 5b

Soal

Tony memilih sebuah bilangan bulat positif kurang dari 100. Berapa peluang bilangan yang dia pilih merupakan kelipatan 6 atau 9?

Solusi

Kasus ini **bukan** merupakan "kejadian saling terpisah", sehingga

P(6 atau 9) = P(6) + P(9) – P(18) → karena FPB(6,9) = 18

= { **[**100/6**]** + **[**100/9**]** – **[**100/18**]** } / 100

= (16 + 9 – 5) / 100

= 20 / 100

= **1/5**

Conditional Probability

Peluang bersyarat:

ukuran peluang dari suatu kejadian **jika diketahui** kejadian lain telah terjadi. Umumnya peluang bersyarat melibatkan *kejadian tidak saling bebas* → **P(A n B) ≠ P(A).P(B)**

Notasi:

$$P(B|A) = \frac{P(A\ n\ B)}{P(A)}$$

Menggunakan Diagram

Diagram dapat mempermudah penghitungan dibandingkan dengan penggunaan notasi, yang akan dijelaskan dalam contoh berikut.

Example 6a

Conditional Probability with Notation

Soal (Advanced)

Tiga dadu dilempar bersamaan. Tentukan peluang bahwa total nilai dari ketiga mata dadu yang muncul adalah bilangan prima jika

a) Mata dadu pertama bernilai 3;

b) Jumlah 2 mata dadu pertama bernilai 9.

[N.B: Gunakan metode **notasi** untuk menyelesaikan **Example 6a**]

Example 6a

Conditional Probability with Notation

Solusi

a) P(A) = peluang dadu pertama bernilai 3

P(B|A) = peluang 2 dadu sisanya menyebabkan prima

P(A n B) = peluang yang ditanyakan dalam soal

Dadu pertama bernilai [3] → P(A) = 1/6

Dua dadu tersisa. Range total nilai yang mungkin adalah [5,15]

Bilangan prima dalam range = {5 , 7 , 11 , 13}

Kombinasi 2 dadu = {(1,1) | (1,3),(2,2) | (2,6),(3,5),(4,4) | (4,6),(5,5)}

→ P(B|A) = 8/21 ← [21 didapat dari ${}^{6}C_{2(rep)}$, kombinasi repetitif]

Dengan demikian,

P(A n B) = P(B|A) x P(A)

= (8/21) x (1/6) = **4/63**

Example 6a

Conditional Probability with Notation

Solusi

b) P(A) = peluang jumlah 2 dadu pertama bernilai 9

P(B|A) = peluang 1 dadu sisanya menyebabkan prima

P(A n B) = peluang yang ditanyakan dalam soal

Dua dadu pertama bernilai [9]

Kombinasi 2 dadu = { (3,6) , (4,5) }

→ P(A) = 2/21 ← [21 didapat dari ${}^{6}C_{2(rep)}$, kombinasi repetitif]

Satu dadu tersisa. Range total nilai yang mungkin adalah [10,15]

Bilangan prima dalam range = {11 , 13} → P(B|A) = 2/6

Dengan demikian,

P(A n B) = P(B|A) x P(A)

= (2/6) x (2/21) = **2/63**

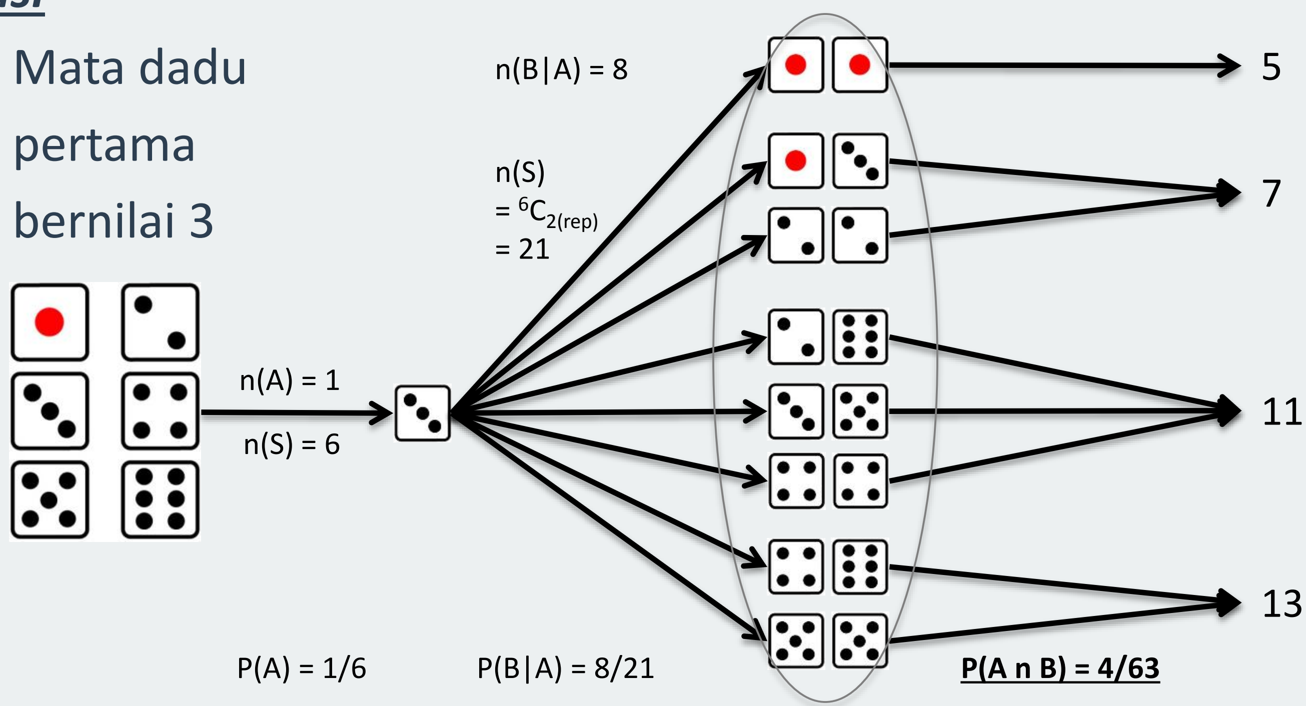
Example 6b

Conditional Probability with Diagram

Soal: Selesaikan **Example 6a** menggunakan metode **diagram**.

Solusi

a) Mata dadu pertama bernilai 3

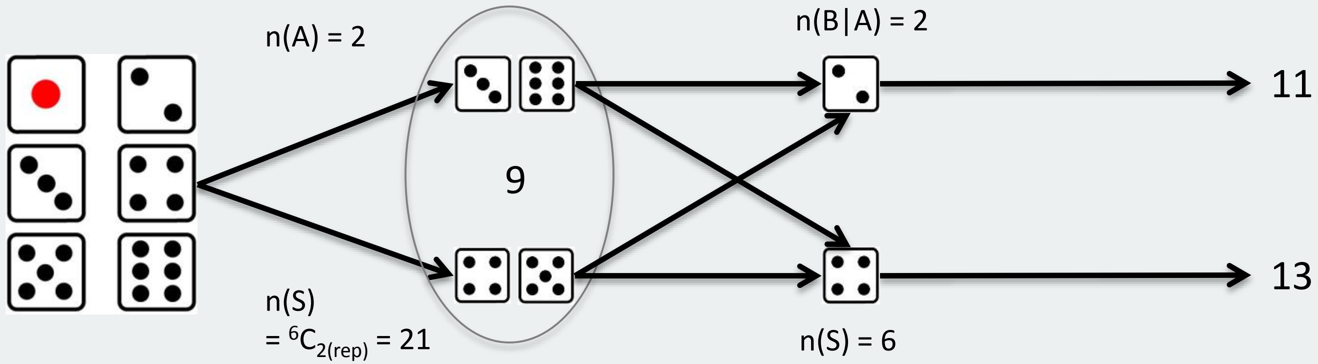


Example 6b

Conditional Probability with Diagram

<u>Solusi</u>

b) Jumlah 2 mata dadu pertama bernilai 9



P(A) = 2/21 P(B|A) = 2/6 **<u>P(A n B) = 2/63</u>**

THE END