BBMerlion

Differential Equation

By : Zhafir Aglna Tijani

Differential Equation

- Definisi :

  "Persamaan yang mengandung unsur diferensial"

- Contoh

$$5\frac{dy}{dx} = x^2 + 7x \qquad \frac{dy}{dx} = 2y + 5x \qquad \frac{dy}{dx} = y^2 + 2y$$

- Tujuan mempelajari ini adalah untuk mencari solution of y . Dalam kata lain y = f(x)

Differential Equation

How to solve ?

- Integral, dengan beberapa penyesuaian
- Triknya adalah “Separation of Variables”
- Anggaplah $\frac{dy}{dx}$ sebagai variabel biasa layaknya $x = \frac{a}{b}$

$$\text{Separation of Variables} \begin{cases} \int f(x)\,dx \\ \\ \int f(y)\,dy \end{cases}$$

Quick Notes

- Dalam setiap mengerjakan Integral, selalu ada komponen konstanta C
- Konstanta C ini menarik. Jika integral kita tidak mempunyai batas, maka semua operasi konstanta hasilnya adalah konstanta juga

Ilustrasi dan contoh

$$\int f(x) = F(x) + C1$$

$$\int g(x) = G(x) + C2$$

then

$$\int f(x) + \int g(x) = F(x) + G(x) + C1 + C2$$

$$\int f(x) + \int g(x) = F(x) + G(x) + C$$

Intinya adalah, semua operasi konstanta yang dilakukan pada C, hasilnya adalah konstanta C

$$C1 + C2 - C3 = C$$

$$C1\ X\ C3 = C$$

$$\frac{C1}{3} = C$$

$$\frac{C2 - 9}{21} = C$$

$$\frac{5C2 - 9}{22C1 + 3} = C$$

Separation of Variables

- First case : $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Example :
Solve the following differential equation

$$3\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 1$$

Step 1 : separate dx and dy

$$3\,dy = (6x^2+1)dx$$

Step 2 : integrate both sides

$$\int 3dy = \int 6x^2 + 1\,dx$$

Step 3 : Simplify it

$$3y + C_1 = 2x^3 + x + C_2$$

$$3y = 2x^3 + x + C_2 - C_1$$

$$y = \frac{2x^3+x}{3} + \mathrm{C}$$

Separation of Variables

- Second Case : $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$

Example :
Solve the following differential equation

$$\frac{dy}{dx} = y + 5$$

Step 1 : separate dx and dy

$$\frac{1}{y+5} dy = dx$$

Step 2 : integrate both sides

$$\int \frac{1}{y+5} dy = \int dx$$

$$\ln|y+5| + C1 = x + C2$$

Step 3 : Simplify it

$$\ln|y+5| = x + C2 - C1$$

$$|y+5| = e^{x+C}$$

For y > -5

$$y + 5 = e^{x+C}$$

$$y = e^{x+C} - 5$$

For y < 5

$$y + 5 = -e^{x+C}$$

$$y = -e^{x+C} - 5$$

Separation of Variables

- Third Case : $\frac{dy}{dx} = f(x) * f(y)$

Example :
Solve the following differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{y}$$

Step 1 : separate dx and dy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{2y}$$

$$2ydy = 4xdx$$

Step 2 : integrate both sides

$$\int 2ydy = \int 8xdx$$

Step 3 : Simplify it

$$y^2 + C1 = 4x^2 + C2$$

$$y^2 = 4x^2 + C$$

$$y = \pm\sqrt{4x^2 + C}$$

Integrating Factor

- Jika ada suatu persamaan differensial yg berbentuk :

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$$

- Maka, Integrating Factor (ρ) didefinisikan sebagai :

$$\rho = e^{\int P(x)dx}$$

- Solusi dari persamaan differensial tersebut adalah :

$$y = \frac{1}{\rho}\int \rho Q(x)dx$$

Integrating Factor

Example :
Solve the following differential equation

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - y$$

Step 1 : Ubah menjadi bentuk general

$$\frac{dy}{dx} + 1y = e^{-x}$$

Step 2 : Determine the Integrating factor ρ

$$\rho = e^{\int P(x)dx}$$

$$\rho = e^{\int 1dx}$$

$$\rho = e^{x}$$

Step 3 : Determine the solution for equation

$$y = \frac{1}{\rho}\int \rho Q(x)dx$$

$$y = \frac{1}{e^{x}}\int e^{x}e^{-x}dx$$

$$y = e^{-x}\int 1dx$$

$$y = e^{-x}(x + c)$$

$$y = xe^{-x} + ce^{-x}$$

General Solution and Particular Solution

- Selama ini saat kita menyelesakan differential equation, kita masih menyisakan konstanta C
- Ini disebut “General Solution”
- Jawaban yang lebih spesifik adalah “Particular Solution” , dimana kita mengetahui besar C
- Particular solution dapat dicari jika Initial Value/ Particular Value diketahui (e.g. $Y(0) = 4$, $Y(1) = 3$)

Particular Solution

Example :

Find the particular solution of this differential equation if it is known that y(0) = 1

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - y$$

Step 1 : Find the general solution

Seperti yang kita tahu, soal ini sama dengan soal contoh di integrating factor. Maka general solution dari persamaan ini adalah :

$$y = xe^{-x} + ce^{-x}$$

Step 2 : Find the value of C, by substituting known value

$$1 = (0)e^{-(0)} + ce^{-(0)}$$

$$1 = C$$

Then, the particular solution is

$$y = xe^{-x} + e^{-x}$$

BBMerlion

References

- http://www.reading.ac.uk/AcaDepts/sp/PPLATO/imp/h-tutorials/ode_04_integfact.pdf