BBMerlion

MACLAURIN’S SERIES

Ghifari Eka

Taylor Series

- Sebelum membahas mengenai Maclaurin’s series alangkah lebih baiknya apabila kita mengetahui terlebih dahulu mengenai Taylor series.
- Misalkan terdapat fungsi f(x) yang dapat diturunkan pada rentang a-h < x < a+h dimana h> 0, maka yang dimaksudkan dengan taylor series adalah :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

Maclaurin’s Series

- Maclaurin’s series merupakan kasus spesial dari taylor series dimana nilai dari a = 0. Karena itu Maclaurin’s series adalah sebagai berikut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \cdots$$

Maclaurin's Series

- Berikut adalah tabel dari beberapa fungsi f(x) sederhana dan maclaurin's series-nya.

f(x)	$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$
$(1+x)^n$	$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \ldots$
$\sin x$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \ldots$
$\cos x$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \cdots$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$

Konsep Turunan dan Integral pada Maclaurin's Series

- Konsep dari turunan dan integral dapat digunakan untuk menentukan Maclaurin's series dari suatu persamaan.
- Sebagai contoh: kita ketahui bahwa $\cos x = \frac{d}{dx}(\sin x)$. Misalkan kita hanya mengetahui Maclaurin's series dari sin x, dengan mengetahui bahwa cosx adalah turunan dari sinx kita dapat menentukan Maclaurin's series dari cos x.
- Hal yang serupa juga dapat diaplikasikan untuk kondisi dimana suatu persamaan merupakan integral dari persamaan lainnya.

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \ ...\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \cdots$$

Maclaurin’s Series dari Persamaan Penjumlahan dan Perkalian

- Dengan memanfaatkan pengetahuan kita pada Maclaurin’s series untuk persamaan yang umum kita dapat menentukan Maclaurin’s series dari persamaan yang lebih kompleks.
- Untuk lebih memahami bagian ini, perhatikan contoh berikut:
- Tentukan Maclaurin’s series dari $e^x \cos x$!

Tentukan Maclaurin's series dari $e^x \cos x$!

- Pertama kita telah mengetahui Maclaurin's series dari $e^x \; dan \cos x$. Dengan ini, kita mampu menurunkan Maclaurin's series untuk $e^x \cos x$.

$$e^x \ln(1+x) = (1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots)(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \ldots + \frac{1}{2}x^3 + \ldots$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots$$

Konsep: “Approximation”

- Kita dapat memanfaatkan konsep dari Maclaurin’s series untuk mencari aproksimasi (nilai yang mendekati) dari suatu persamaan.
- Contoh: Tentukan nilai dari 1.998^7!

$$1.998^7 = (2-0.002)^7 = 2^7(1-0.001)^7 = 2^7(1-x)^7 \; dengan \; x = 0.001$$

$$1.998^7 = 2^7\left[1 - 7(0.001) + \frac{7.6}{2!}0.001^2 - \frac{7.6.5}{3!}0.001^3 + \ldots\right]$$

$$= 2^7[1 - 0.007 + 0.0000210 + \ldots] = 127.11$$

Konsep: “Convergence”

- Suatu persamaan dikatakan konvergen apabila variabel dari persamaan itu semakin besar (mendekati tak hingga), nilai/hasil dari persamaan tersebut akan menuju suatu nilai tertentu.

INTEGRAL

Integral = “Kebalikan dari Diferensial”

- Seperti yang telah kita ketahui, melakukan diferensial pada x^2 kita akan mendapatkan $2x$, sebaliknya apabila kita melakukan integral terhadap $2x$ kita akan mendapatkan x^2.

Bentuk Umum Integral

- Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya apabila kita mengintegralkan *2x* kita akan mendapatkan x^2. Kenyataannya x^2 juga merupakan intergal dari 2x + 3 atau 2x – 9. Karena itu integral dari 2x bukan merupakan fungsi unik melainkan dalam bentuk 2x + **K.** Dimana k disebut; **konstanta integral.**
- Karena itu untuk fungsi f(x) apapun berlaku:

$$\int \frac{d}{dx} f(x) dx = f(x) + K$$

Rumus Untuk X Pangkat “n”

- Pada umumnya, turunan dari x^n adalah nx^{n-1}. Sebaliknya untuk x pangkat berapa pun kecuali -1 (negatif satu), berlaku rumus berikut:

$$\int x^n dx = \frac{1}{(n+1)} x^{n+1} + K$$

Definite Integration

- Dengan menggunakan integral kita dapat mencari luas dari grafik pada koordinat kartesius. Jika terdapat sebuah fungsi f(x) yang dibatasi oleh x = a, x = b dan x-axis (y = 0). Maka, area dari grafik tersebut dapat dikalkulasikan sebagai berikut:

$$A = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\, dx$$

Catatan Untuk *Definite Integration*

- Ketika melakukan kalkulasi untuk area dari suatu grafik, bayangkan rumus tersebut sebagai panduan untuk mencari luas komponen-komponen luas pada grafik tersebut.
- Berhati-hati untuk menghitung luas grafik yang memiliki bagian di bawah x-axis. Sebagai contoh jika ketika melakukan integral dari fungsi x^3 dengan batas x = -1 dan x = 1, dapat dipastikan hasilnya akan nol walaupun pada kenyataannya luas grafik tersebut adalah $2 \times \frac{1}{4} \times \ 1^4 = 1$. Mengapa?

Catatan Untuk *Definite Integration*

- Hal ini dikarenakan untuk grafik yang berada di bawah x-axis dengan menggunakan rumus sebelumnya akan bernilai negatif. Yang dapat kita lakukan adalah dengan menukar posisi batasan pada rumus integral pasti.
- Sebagai contoh jika f(x) berada di atas x-axis untuk x = a sampai x = b maka luasnya adalah: $\int_a^b f(x)\,dx$. Namun, jika f(x) berada di bawah x-axis pada rentang tersebut maka luasnya adalah: $\int_b^a f(x)\,dx$

Konsep: Integral Sebagai Limit dari Penjumlahan

- Kita telah mengetahui bahwa dengan menggunakan integral kita mampu menghitung area dari suatu grafik. Namun, mengapa demikian?
- Bayangkan terdapat sebuah persamaan $y = f(x)$ yang membentang dari $x = a$ sampai $x = b$. Apabila, grafik ini kita pecah menjadi bagian-bagian yang lebih kecil dan sama lebarnya kita dapat melihat komponen-komponen kecil area dari grafik tersebut.

Konsep: Integral Sebagai Limit dari Penjumlahan

- Lebar masing-masing komponen tersebut merupakan “potongan kecil” dari keseleruhan x yang kita inginkan, namakan δx.
- Jika A menunjukkan area keseluruhan grafik dari x = a sampai x = b, maka komponen kecil area adalah δA.
- Komponen-komponen kecil dari grafik tersebut mendekati bentuk persegi panjang karena itu δA dapat ditulis sebagai berikut:

$$\delta A = y\delta x$$

Konsep: Integral Sebagai Limit dari Penjumlahan

- Karena A merupakan jumlah dari luas komponen-komponen kecil pada grafik tersebut dari A sampai B maka A dapat ditulis sebagai berikut:

$$A \approx \sum_{x=a}^{x=b} y\delta x$$

- Apabila, besarnya δx semakin kecil maka aproksimasi total luas akan semakin mendekati total area "sesungguhnya" karena itu total area dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} y\delta x$$

Menghitung Luas Yang Diapit Dua Grafik

- Sebelumnya kita telah mampu menghitung luas suatu grafik dengan asumsi bahwa grafik tersebut dibatasi oleh garis, bagaimana luas area yang diapit dua grafik?
- Misalkan terdapat 2 persamaan, $f(x)$ dan $g(x)$. Langkah-langkah yang dapat kita ambil untuk menghitung luas areanya adalah:
  1. Menggambar sketsa dari kedua fungsi pada satu diagram kartesius, hal ini akan membantu langkah selanjutnya
  2. Tentukan titik temu dari kedua grafik tersebut dengan menyamakan kedua persamaan (i.e $f(x) = g(x)$) misalkan pada $x = a$ dan $x = b$.

Menghitung Luas Yang Diapit Dua Grafik

3. Berdasarkan sketsa grafik yang telah dibuat perhatikan persamaan yang “mengungguli” persamaan lainnya misalkan untuk nilai x = x_0 dan f(x) > g(x). Maka f(x) “mengungguli” g(x)
4. Dari sini maka kita dapat menghitung luas yang di apit kedua grafik tersebut sebagai berikut:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Integral Untuk Menghitung Volume

- Selain untuk menghitung luas, integral juga dapat kita gunakan untuk menghitung volume putar (terhadap sumbu x atau sumbu y) dari suatu grafik.
- Berikut adalah rumus yang dapat digunakan apabila grafik hanya terdiri dari satu persamaan dan diputar thd. sumbu x.

$$V = \int_a^b f(x)^2 dx$$

Integral Untuk Menghitung Volume

- Kemudian, bagaimana apabila terdapat dua persamaan pada diagram kartesius?
- Menyerupai langkah-langkah pada perhitungan luas namun dengan rumus yang berbeda:

$$V = \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 dx$$

Ingat! Rumus di atas bukan $[f(x) - g(x)]^2$

Integral Terhadap Elemen Horizontal

- Jika terdapat sebuah grafik yang terlihat sulit apabila kita melakukan integral terhadap elemen vertikal, kita dapat mengintegralkannya terhadap elemen horizontal dengan rumus yang menyerupai:

$$A = \int_{y=a}^{y=b} f(y)\, dy$$

Aproksimasi Integral Pasti: *The Trapezium Rule*

- Ketika sebuah grafik yang ingin kita ketahui besar luasnya, kita dapat membagi grafik tersebut ke dalam bagian-bagian yang lebih kecil dengan lebar (panjang pada komponen x) yang sama. Potongan-potongan grafik tersebut akan menyerupai trapezium.
- Misalkan sebuah grafik dibagi menjadi n bagian dengan lebar yang sama yakni *d*, maka ketinggian dari masing-masing partisi adalah $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$.

Aproksimasi Integral Pasti: *The Trapezium Rule*

Maka, dengan menggunakan rumus luas trapezium kita dapat memperkirakan luas dari grafik tersebut.

$$A \approx \frac{1}{2} \times d \times (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ ... + 2y_{n-1} + \ y_n)$$

Aproksimasi Integral Pasti: *The Simpson's Rule*

- Formula yang memberikan aproksimasi lebih baik dari *the trapezium rule* adalah *simpson's rule*, formulanya menyerupai trapezium rule:

$$A \approx \frac{1}{3} \times d \times (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ ... + 4y_{n-1} + 2y_n)$$

Tehnik Mengintegralkan: Substitusi

- Untuk mempermudah penjelasan mari kita langsung mencoba menggunakan contoh untuk menjelaskan metode ini.

Hitunglah: $\int 2x\,(5+x^2)^5 dx$

- Pada awalnya soal ini akan terlihat sulit, mungkin teman-teman membayangkan untuk membuka pangkat dari $5+x^2$ kemudian mengalikan 2x ke dalamnya.
- Metode seperti itu juga memungkinkan namun sangat *time-consuming*. Dengan metode substitusi kita dapat menyelesaikan permasalahan tersebut dengan mudah.

Hitunglah: $\int 2x\,(5+x^2)^5 dx$

- Jika teman-teman perhatikan 2x merupakan turunan dari $5+x^2$, berawal dari pengetahuan inilah kita dapat menggunakan metode substitusi.

$$u = 5 + x^2 \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

- Dengan mensubstitusikan kedua pernyataan tersebut kita dapat mengubah soal yang sebelumnya menjadi bentuk integral sederhana.

$$\int 2x\,(5+x^2)^5 dx = \int 2x\,(u)^5 \frac{du}{2x} = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + K$$

Tehnik Mengintegralkan: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

- Sebelum membahas bagaimana mengintegralkan $\frac{f'(x)}{f(x)}$ terlebih dahulu kita perlu mengetahui apakah integral dari $\frac{1}{x}$ atau x^{-1}.
- Demi mempermudah penjelasan kita langsung saja mengetahui bentuk integral dari $\frac{1}{x}$ tanpa pembuktian.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + K$$

- Bagi Anda yang belum tahu, ln(x) merupakan bentuk logaritma namun dengan *base* bilangan natural (e). Sebagai contoh kita diajarkan bahwa “log” memiliki *base* yakni 10.

Tehnik Mengintegralkan: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

- Lalu, bagaimana dengan $\frac{f'(x)}{f(x)}$? Rumusnya cukup mudah dan menyerupai untuk x pangkat negatif 1.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + K$$

- Untuk pembuktiannya dapat diperhatikan melalui contoh yang akan diberikan.

Hitunglah: $\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}\,dx$

$$\int \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2}\,dx$$

$u = x^3 + x^2$ $\qquad\qquad \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2x$

$$\int \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{3x^2 + 2x}{u} \times \frac{du}{3x^2 + 2x}$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{u}) + \mathbf{K} = \mathbf{ln}\left(\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2\right) + \boldsymbol{K}$$

Tehnik Mengintegralkan: sin^2x

- Untuk mengintegralkan sin^2x, pertama-tama kita terlebih dahulu mengubahnya menjadi bentuk yang dapat diintegralkan
- Kita tahu bahwa: $\cos 2x = 1 - 2sin^2x$
- Oleh karena itu:

$$\int sin^2(x)dx = \int \frac{1}{2} \times (1 - \cos(2x))dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \mathrm{K}$$

Tehnik Mengintegralkan: cos^2x

- Sama halnya dengan sin^2x, untuk mengintegralkan cos^2x kita terlebih dahulu mengubahnya ke bentuk yang dapat di-integralkan
- $\cos 2x = 2cos^2x - 1$

$$\int cos^2xdx = \int \frac{1}{2} \times (\cos 2x + 1)dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin2x + K$$

Tehnik Mengintegralkan: $tan^2 x$

- Untuk mengintegralkan $tan^2 x$ seperti kasus sebelumnya terlebih dahulu kita ubah ke dalam bentuk yang dapat di-integralkan.
- $tan^2 x + 1 = sec^2 x$

$$\int tan^2 x dx = \int sec^2 x - 1\, dx = \tan x - x + K$$

Tehnik Mengintegralkan: $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

- Selanjutnya kita akan membahas cara mengintegralkan fungsi yang merupakan turunan dari invers trigonometri.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$x = a \sin\theta \qquad \frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - (a\sin\theta)^2}} a\cos\theta d\theta$$

$$= \int \frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{(a\cos\theta)^2}} = \theta + K$$

$$= \boldsymbol{\sin^{-1}\frac{x}{a} + K}$$

Tabel 1

- Berikut adalah tabel dari bentuk tehnik pengintegralan yang menyerupai bentuk pada slide sebelumnya. Jika, teman-teman berminat dapat mencoba membuktikannya dengan cara yang serupa.

f(x)	$\int f(x)dx$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\sin^{-1}\dfrac{x}{a} + K$
$\dfrac{1}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + K$
$\dfrac{1}{a^2 - x^2}$	$\dfrac{1}{a} ln\lvert sec\theta + tan\theta\rvert, \theta = \sin^{-1}\dfrac{x}{a}$

Tehnik Mengintegralkan: *Integration by Parts*

- Bagaimana misalnya ketika teman-teman mendapatkan soal pengintegralan untuk perkalian dari dua fungsi yang berbeda, misalkan polynomial dengan trigonometri?
- Metode *Integration by Parts* akan sangat berguna ketika teman-teman bertemu soal seperti demikian rumus dari *Integration by Parts* sebagai berikut:

$$\int v.du = u.v - \int u.dv$$

Biasanya, yang menjadi variabel v adalah fungsi yang dapat diturunkan menuju 1.

Tehnik Mengintegralkan: *Integration by Parts*

- Untuk lebih memahami metode ini perhatikan contoh soal berikut ini.
- Hitunglah: $\int x\, cos\, x\, dx$!

$v = x \qquad \frac{dv}{dx} = 1$

$du = \cos(x) dx \qquad u = sinx$

$$\int x \cos x\, dx = u.v - \int u.dv$$

$$= x \sin x - \int sinxdx = \boldsymbol{x \sin x + \cos x + K}$$