Differentiation

By : Zhafir Aglna Tijani

Differentiation

- Definisi

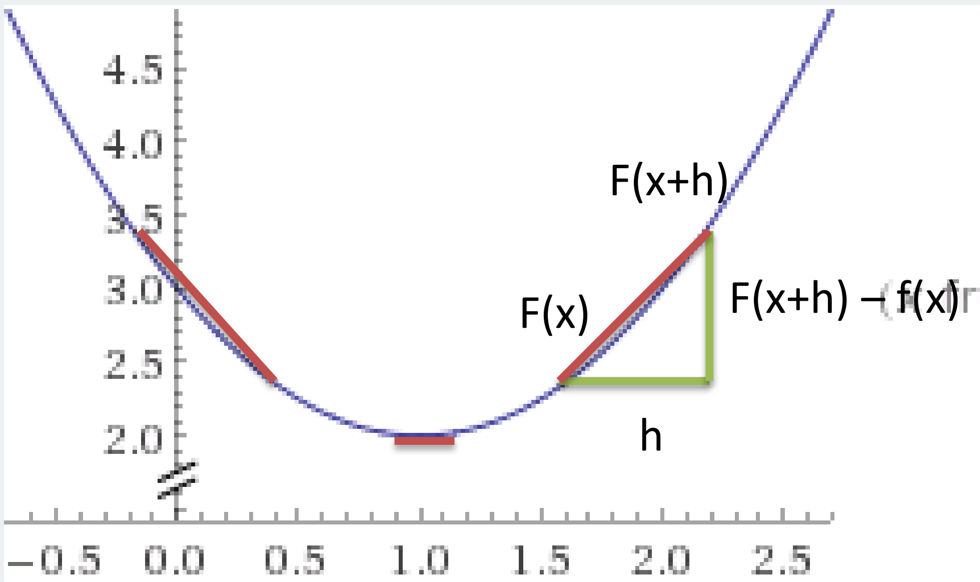
$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- F'(x) menggambarkan *rate of change* dari f(x) (Rasio perubahan fungsi f(x) pada tiap x)
- Sangat berguna untuk memahami karakteristik grafik, seperti kapan ia akan naik, kapan ia akan turun, nilai maksimal/minimal grafik, kelengkungan, dan semacamnya

Differentiation

- Limit tadi maksudnya apa ?

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



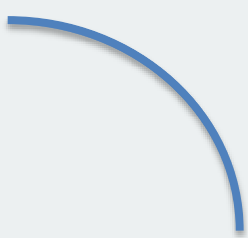
•Adalah gradien dari garis, yg merupakan perkiraan (approximation) dari grafik f(x)
•Jika h semakin kecil dan semakin kecil, maka garis approksimasi tadi akan semakin mendekati garis fungsi sesungguhnya
•Inilah yang disebut differentiation

- Pada grafik di bagian kanan, gradien garis tersebut adalah positif, jadi bisa ditarik kesimpulan bahwa jika f'(x) > 0 , maka f(x) sedang "Increasing"
- Sebaliknya jika di kiri, f'(x) < 0, maka f(x) sedang "Decreasing"
- Jika f'(x)=0, maka F(x) adalah critical point

Differentiation

- F'(x) pada sebuah grafik menentukan karakteristik bahwa dia increasing/decreasing di titik x
- F''(x) pada sebuah grafik menentukan fungsi itu concave atau convex
- Jika f''(x) = 0 atau F''(x) doesn't exist, x adalah *inflection point* (titik dimana concavity berubah / datar)

$$f''(x) < 0$$

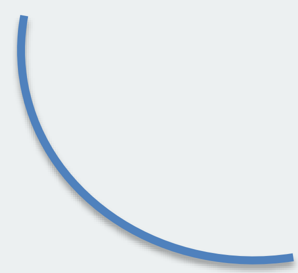


Concave downwards

Concave upwards

$$f''(x) > 0$$

Convex upwards



Convex downwards

Differentiation

- Summary 1
- If $f'(x) < 0$ and $f''(x) < 0$, then the graph is concave downwards
- If $f'(x) < 0$ and $f''(x) > 0$, then the graph is convex downwards
- If $f'(x) > 0$ and $f''(x) < 0$, then the graph is concave upwards
- If $f'(x) > 0$ and $f''(x) > 0$, then the graph is convex upwards
- If $f'(x) = 0$ and $f''(x) < 0$, then x is a local maximum point
- If $f'(x) = 0$ and $f''(x) > 0$, then x is a local minimum point
- If $f''(x) = 0$, the concavity is inconclusive

Differentiation

- Trivial matters

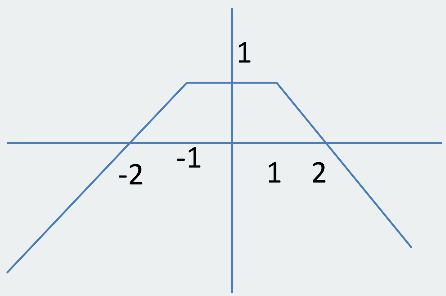
- Dalam beberapa buku/soal, convex terkadang disebut sebagai concave up, dan concave sebagai concave down

Fungsi f(x) dari fungsi f’(x)

- Bentuk fungsi f(x) bisa ditebak (can be expected) jika grafik f’(x) diketahui
- How ? Yaitu dengan Sifat f’(x) dan f’’(x)
- Dari grafik f’(x), kita bisa mengetahui nilai dari f’(x) dan juga f’’(x)
- Grafik f(x) tidak perlu digambar secara akurat, hanya sketsa (yang penting bentuk dan titik2 pentingnya sesuai). Kecuali jika diminta secara detil, banyak bantuan detil akan diberikan

Example

The graph of $f'(x)$ is showed in figure below, sketch the graph of $f(x)$!



Ans : Step 1 : Definisikan $f'(x)$ dan $f''(x)$ setiap kejadian yang ada di grafik

When $-\infty<x<-2$, $f'(x)$ = negative , $f''(x)$ = positive constant
$-2<x<-1$, $f'(x)$ = positive , $f''(x)$ = positive contant
$-1<x<1$, $f'(x)$ = positive constant , $f''(x) = 0$
$1 <x< 2$, $f'(x)$ = positive , $f''(x)$ = negative contant
$2<x<\infty$, $f'(x)$ = negative , $f''(x)$ = negative contant
And $f'(x) = 0$ while $x = -2$ and $x = 2$

Step 2 : Dari yang diketahui, simpulkan bentuk grafik sesuai karakteristik

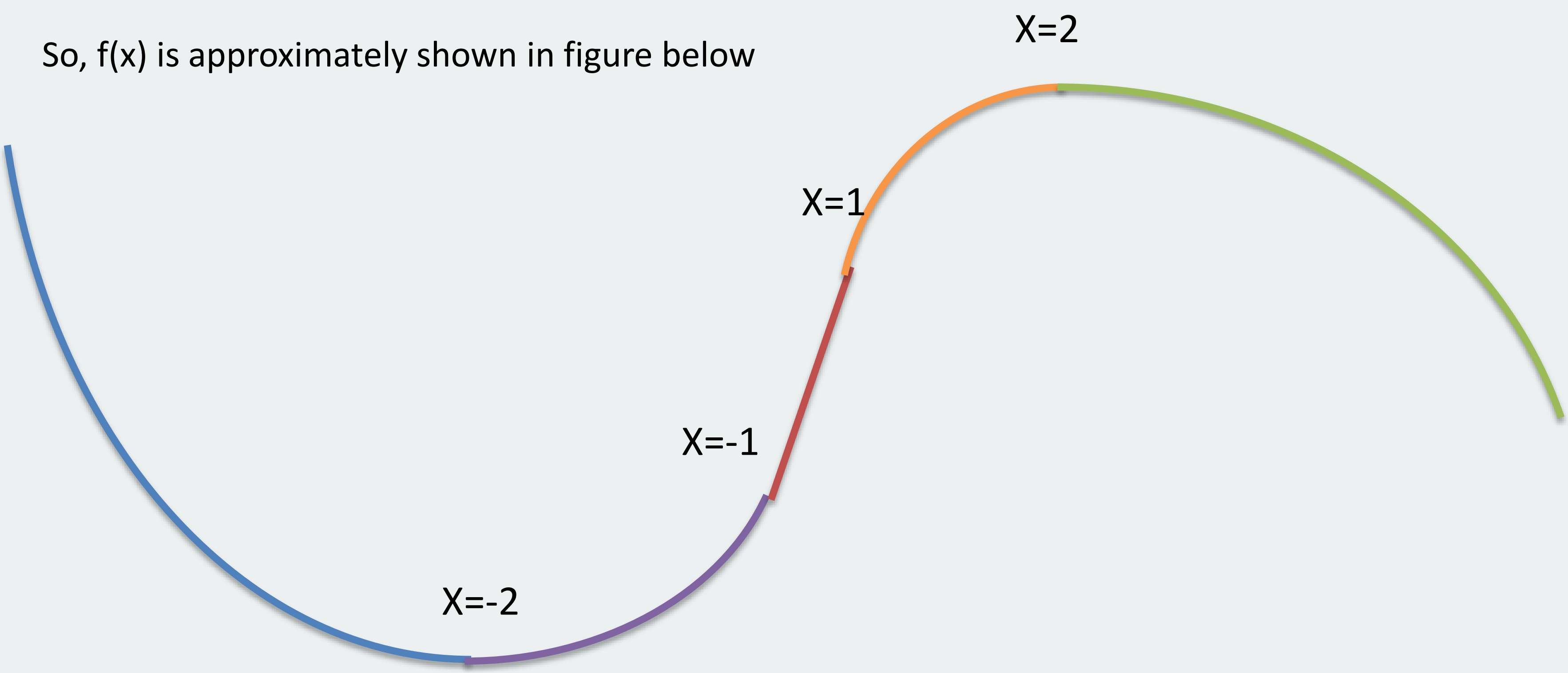
When $-\infty<x<-2$, $f'(x)$ = negative , $f''(x)$ = positive constant ➔ Convex downwards
$-2<x<-1$, $f'(x)$ = positive , $f''(x)$ = positive contant ➔ Convex upwards
$-1<x<1$, $f'(x)$ = positive constant , $f''(x) = 0$ ➔ Increasing slope
$1 <x< 2$, $f'(x)$ = positive , $f''(x)$ = negative contant ➔ Concave upwards
$2<x<\infty$, $f'(x)$ = negative , $f''(x)$ = negative contant ➔ Concave downwards

Example

Step 3 : Sum it up

When -∞<x<-2 , f'(x) = negative , f''(x) = positive constant ➔ Convex downwards
-2<x<-1 , f'(x) = positive , f''(x) = positive contant ➔ Convex upwards
-1<x<1 , f'(x) = positive constant , f''(x) = 0 ➔ Increasing slope
1 <x< 2 , f'(x) = positive , f''(x) = negative contant ➔ Concave upwards
2<x<∞ , f'(x) = negative , f''(x) = negative contant ➔ Concave downwards

So, f(x) is approximately shown in figure below



Differentitation

- Review : menurunkan fungsi y terhadap x (differentiate y with respect to x) , adalah seperti ini

$$y = ax \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a$$

$$y = ax^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$$

$$y = uv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u'v + v'u$$

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v'u - u'v}{v^2}$$

$$y = a \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$$

$$y = e^{ax} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ae^{ax}$$

More about e

- e adalah bilangan natural = 2.71828.......
- e menarik karena beberapa sifatnya dalam calculus

Definisi / Taylor Series

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Differensial

$$y = e^{ax} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ae^{ax}$$

Logaritma

$$^{e}\log x = \ln x$$

Integral

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x \qquad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

Implicit differentiation

- Sekarang, bagaimana cara mencari differensial terhadap x. jika y ada dalam bentuk yg tidak biasa ? misalkan

$$x^3 + 2x + 2y^2 = 0$$

- Kita bisa menggunakan implicit differentiation dengan cara

$$\frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}2x + \frac{d}{dx}2y^2 = 0$$

Cannot be solved directly

$$\frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}2x + \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}2y^2 = 0$$

$$3x^2 + 2x + 4y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 2x}{4y}}$$

More examples

Find the implicit differentiation of this form with respect to x

$$e^{2x} + 3x + \ln y = 0$$

Ans :

$$\frac{d}{dx}e^{2x} + \frac{d}{dx}3x + \frac{d}{dx}\frac{dy}{dy}\ln y = 0$$

$$\frac{d}{dx}e^{2x} + \frac{d}{dx}3x + \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\ln y = 0$$

$$2e^{2x} + 3 + \frac{dy}{dx}\frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y(2e^{2x} + 3)$$

Try solve this !

Find the implicit differentiation of this form with respect to x

$$(2y+2)^2 + \cos x = 5y$$

Parametric Differentiation

- Selain secara implisit, terkadang persamaan dinyatakan dalam bentuk parametric, contoh bentuk parametric adalah sebagai berikut

$$x = \cos t \qquad\qquad y = t^2 + 2$$

- Terkadang, kita diharuskan mencari dy/dx dari fungsi tersebut. Cara termudah adalah dengan mencari kedua turynan dari masing2 variabel terhadap t. Lalu dy/dx dapat didefinisikan sebagai

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Dalam kasus ini

$$dy/dt = -\sin t$$

$$dx/dt = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{2t}$$

- Saat nilai dy/dx ini adalah 0 , maka nilai t pada saat itu disebut dengan stationary point

Example

- Find the stationary point in the range of 0 <= t <= π/2 of the parametric function that given below

$$x = \sin t^2 \qquad y = -3\cos t^2$$

Step 1 : cari dx/dt

Step 2 : cari dy/dt

$$\frac{d}{dt}\sin t^2 = 2t\cos t^2$$

$$-\frac{d}{dt}3\cos t^2 = 6t\sin t^2$$

Step 3 : cari dy/dx

Step 4 : cari t yg membuat dy/dx=0

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6t\sin t^2}{2t\cos t^2} \qquad \frac{dy}{dt} = \tan t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \qquad t = 0$$

Therefore, the stationary point is t = 0

Tangent and Normal Line

- Tangent line (garis singgung) adalah garis yang menyinggung hanya di satu titik dari sebuah kurva
- Normal line (garis normal) adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung, dan melewati titik yg dissinggung oleh tangent line
- 2 hal yang penting dalam mencari kedua garis ini adalah **Gradien** dan **Titik yang disinggung**
- Cara untuk mencari persamaan garis akan sama, yang berbeda hanyalah gradien m, titik yg dilewati akan sama yaitu (X,Y) .

Tangent Line

$$m = \frac{df(X)}{dx}$$

Normal Line

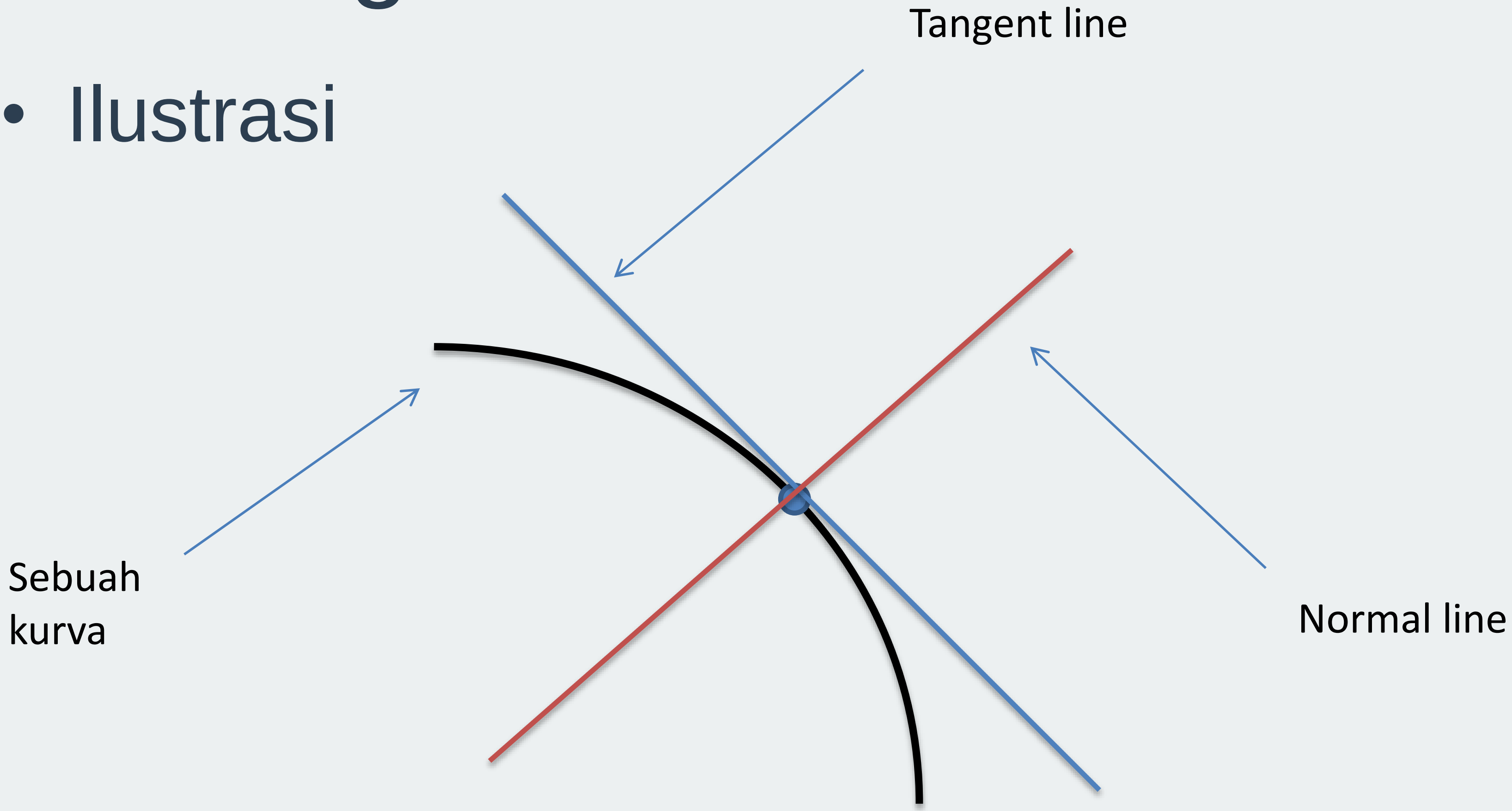
$$m = -\frac{1}{\frac{df(X)}{dx}}$$

Straight Line Equation

$$y - Y = m(x - X)$$

Tangent and Normal Line

- Ilustrasi



Tangent and Normal Line

- Example
- Find the tangent and normal line for curve $f(x) = x^2 + 2x - 7$ at the point where $x = 3$
- Ans : *Step 1 : cari titik yang disinggung*

  When x = 3,

  then $f(x) = (3)^2 + 2(3) - 7 = 8$

  The intersection point is (3, 8)

Step 2 : Cari gradient dari tangent line dan normal line

TANGENT LINE

$$m = \frac{df(X)}{dx}$$

$$m = \frac{d(x^2 + 2x - 7)}{dx}$$

$$m = 2x + 2 = 2(3) + 2 = 8$$

NORMAL LINE

Since m for tangent line is 8, then

$$m = -\frac{1}{m'}$$

$$m = -\frac{1}{8}$$

Tangent and Normal Line

Step 3 : cari garis yang dimaksud

Straight Line Equation

$$y - Y = m(x - X)$$

TANGENT LINE

$$y - 8 = 8(x - 3)$$

$$y = 8x - 24 + 8$$

$$y = 8x - 16$$

NORMAL LINE

$$y - 8 = -\frac{1}{8}(x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} + 8$$

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{27}{8}$$

Application of differentiation

- Aplikasi yang paling umum adalah optimisasi

- Optimisasi adalah cara untuk mencari nilai maksimal atau minimal dari sebuah masalah

When

$$\frac{d}{dx} f(a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(a) = Max / Min$$

Application of Differentiation

- 6 steps of Optimization

i. Ask yourself : Apa yg diminta, apa variabel yang digunakan, apa yang dikasih, dan apa saja kondisi-kondisinya

ii. Draw a diagram : Gambar agar lebih jelas visualisasinya

iii. Introduce Notation for main objective : Tulis fungsi yang ingin kita cari dalam bentuk matematika (ex : $F = 20a + b$, dimana F adalah y ingin kita cari)

iv. Express F in terms of 1 Variable : Ubah semua hal dalam satu variabel, cari relasi antara variabel 1 dengan yang lain

v. Find the maximum or minimum value by differentiation

vi. Substitute the value, find the objective function

Application of differentiation

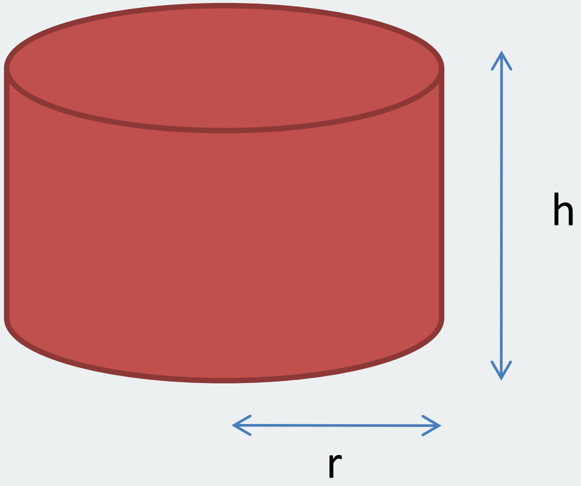
- Example :

A cylindrical can is to be made to hold 1 L of oil. Find the dimensions that will minimize the cost of the metal to create the can !

Step 1 : Ask Yourself

Yang diminta : Minimize the cost → Minimize the area of metal !
Kondisi : Cylinder Volume = 1 L → 1000 cm^3
Variabel yang digunakan : V = Volume, A = Area, r = jari-jari, h = tinggi silinder

Step 2 : Draw a Diagram



Application of Differentiation

Step 3 : Introduce a notation/function

Kita ingin mencari nilai minimum “Area of the metal”. Seperti yang kita ketahui, total luas permukaan sebuah tabung adalah 2 X (Luas Alas) + Luas Selimut. Jadi bisa dirumuskan luas metal adalah

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Step 4 : Express A in terms of 1 variable

Seperti yang terlihat, fungsi A memiliki dua variabel yaitu r dan h. Oleh karena itu, kita harus mencari tahu hubungan antara r dan h. Periksa kembali apa yang kita miliki, kita tahu bahwa Volume silinder adalah 1000 cm^3. Maka bisa ditulis

$$V = \pi r^2 h = 1000 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$\boxed{A = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}}$$

Application of Differentiation

Step 5 : Find the minimum value by differentiation

$$\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(2\pi r^2 + \frac{2000}{r})$$

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

To find minimum, f'(r) = 0

$$\frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2} = 0$$

$$\pi r^3 = 500$$

$$r = \sqrt[3]{500/\pi}$$

Step 6 : Substitute the value, find the objective function

$$A = 2\pi(500/\pi)^{\frac{2}{3}} + \frac{2000}{\sqrt[3]{500/\pi}}$$

A Level Syllabus

5.1 Differentiation Include:

- Graphical interpretation (i) $f'(x) > 0$, $f'(x) = 0$, and $f'(x) < 0$)
  (ii) $f''(x) > 0$ and $f''(x) < 0$)
- Relating the graph of $y = f'(x)$ to the graph of $y = f(x)$
- Differentiation of simple functions defined implicitly or parametrically
- Finding the numerical value of a derivative at a given point using graphic calculator
- Finding equations of tangents and normals to curves
- Solving practical problems involving differentiation

References

- Optimization : http://www.mccc.edu/~silvere/documents/Chap4_Sec7StewartMAT151.pdf

- http://www.mathsrevision.net/node/64