BBMerlion

Sequences & Series

Naufal Elang Ciptadi

Topics that will be discussed

- Concepts of Sequence and Series
- Sequences
- Series
- Binomial Expansion
- Mathematical Induction

Concepts of Sequences & Series

A. Sequences

- Sequence adalah sebuah set bilangan yang berurutan dengan sebuah *rule* untuk mendapatkan *value* dari bilangan tersebut. Sequence bisa menjadi ***finite*** atau ***infinite***. Contohnya: 1, 3, 5, 7, … , 33 adalah sebuah sequence bilangan ganjil yang finite dan 2, 4, 6, … adalah infinite sequence dari bilangan genap.
- *Un* (atau *Tn*) biasa digunakan sebagai tanda untuk urutan ke-*n* dalam sebuah deret. I.e.: 1, 4, 7, 10, …, term pertama, $U_1 = 1$, term kedua, $U_2 = 4$ dan seterusnya.
- Sequence bisa dideskripsikan dengan algebraic expression untuk term ke-*n*. Contohnya: $U_n = 2n – 1$ untuk deret ganjil

Concepts of Sequences & Series

- Sequence bisa diberikan dalam bentuk *recurrence relation* yang berarti untuk membentuk bilangan deret berikutnya bilangan itu membutuhkan bilangan sebelumnya ($U_{n+1} = f(U_n)$). Sebagai contoh: 1, 6, 31, 156, … yang bisa dideskripsikan sebagai $U_{n+1} = 5U_n + 1$

B. Series

- Series adalah jumlah dari deret (*sequences*). Series yang terus berlanjut tiada akhirnya disebut *infinite* series. Contoh: 1 + ½ + 1/3 + ¼ +… adalah infinite series. Sedangkan yang ada batasnya disebut *finite* series. Contohnya adalah 1 + 2 + 4 + 8.
- S_n biasa digunakan sebagai penanda dari jumlah suku *n* pertama didalam deret ($S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$)

BBMerlion

Sequences

A. The relationship between U_n and S_n

Untuk setiap *sequence*, u_1, u_2, u_3, …, anggap S_n adalah jumlah dari *sequence* suku *n*. Berarti: $U_1 = S_1$ dan suku ke-*n*: $U_n = S_n - S_{n-1}$ dimana S_{n-1} menunjukkan jumlah dari suku *n*-1 yang pertama.

Contoh:

Jumlah deret suku *n* pertama adalah $S_n = 2n + 3n^2$. Carilah value dari suku pertama dan carilah U_n dalam ekspresi n:

Jawaban:

$a = S_1 = 2(1) + 3(1)(1) = 5$

Sequences

$U_n = S_n - S_{n-1}$

$= 2n + 3n^2 - [2(n - 1) + 3(n - 1)^2]$

$= 2n + 3n^2 - [2n - 2 + 3(n^2 - 2n + 1)]$

$= 2n + 3n^2 - 2n + 2 - 3n^2 + 6n - 3$

$= 6n - 1$

B. Sequence given by formula of the *n* term

Contoh:

Sebuah sequence memiliki equation bilangan ke *n* yaitu $U_n = 4n + 6$. Tentukan sequence dari 10 urutan pertama.

Sequences

- Jawaban:

$U_1 = 4(1) + 6 = 10$; $U_2 = 4(2) + 6 = 14$; $U_3 = 4(3) + 6 = 18$; dst.

Sequences = 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46.

Contoh:

Ada sebuah sequence: 8, 17, 26, 35, 44, … carilah hubungan U_n dalam sequence ini.

Jawaban:

$U_1 = 8$; $b = 9$ -> $8 + (n – 1)9 = 9n – 1$ (akan dijelaskan lebih lanjut saat arithmetic series)

Sequences

C. Sequences generated by recurrence relation form

Contoh:

Sebuah *recurrence relation* dari sebuah *Sequence* $U_{n+1} = 0.5U_n + 25$. Temukan persamaan suku dalam *n*.

Jawaban:

$$U_n = 0.5U_{n-1} + 25$$
$$= 0.5(0.5U_{n-2} + 25) + 25$$
$$= 0.5^2U_{n-2} + 25(1 + 0.5)$$
$$= 0.5^3U_{n-3} + 25(1 + 0.5 + 0.5^2)$$
$$= 0.5^nU_0 + 25(1 + 0.5 + 0.5^2 + \ldots + 0.5^{n-1})$$

Sequences

$= 0.5^n U_0 + 25$

$= 0.5^n U_0 + 50(1 - 0.5^n)$

$= 0.5^n (U_0 - 50) + 50$

Note: akan dijelaskan lebih lanjut didalam geometric sequence untuk $(1 + 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + \ldots) = \left(\frac{1-0.5^n}{1-0.5}\right)$

Series

A. Arithmetic Series

- Jika *a* menunjukkan first term of a sequence dan *d* menunjukkan *common difference*, progresi aritmatiknya akan menjadi: a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, …, $a + (n – 1)d$
- Dari persamaan diatas, persamaan *n*th term adalah: $U_n = a + (n – 1)d$
- $d = U_n – U_{n-1}$
- Jumlah dari progresi aritmatik (arithmetic series) = S_n:

$$Sn = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$Sn = \frac{n}{2}[a + Un]$$

Series

Contoh:

Carilah jumlah dari U_6 sampai dengan U_{18}, dimana *a* adalah 5 dan *d* adalah 3.

Jawaban:

$a = 5$; $d = 3$.

$U_6 + U_7 + U_8 + \ldots + U_{18} = S_{18} – S_5$

$S_{18} = 18/2[2(5) + 17(3)] = 549$; $S_5 = 5/2[2(5) + 4(3)] = 55$

$549 – 55 = 494$

Series

B. Geometric Series

- Jika *a* menunjukkan term pertama dari sebuah *sequence*, dan setiap term nya merupakan kelipatan dari *r* yaitu *common ratio* maka bentuk dari *sequence* itu adalah: a, ar, ar^2, ar^3,…, ar^{n-1}, …
- The *n* term: ar^{n-1}
- Common ratio = $\frac{Tn}{Tn-1} = r$
- Sum of the first *n* term: $Sn = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $if\ |r| < 1$

$$Sn = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad if\ |r| > 1$$

Series

Contoh:

Term pertama, *a*, adalah 5. U_n = 640. S_n = 1275. *r*?

Jawaban:

$a = 5$

$U_n = ar^{n-1}$

$640 = 5r^{n-1}$

$128 = r^{n-1}$

$r^n = 128r$

Dari menggunakan rumus S_n dan men-subtitusi $r^n = 128r$, kita mendapatkan: $1275 = \frac{5(1-128r)}{1-r}$

Series

$1275 - 1275r = 5 - 640r$

$635r = 1270$

$r = 2$

- Geometric series bisa dikatakan konvergen apabila $|r| < 1$
- Jika geometric series konvergen, maka jumlah series sampai tak terhingga bisa dihitung:

  $S_\infty = a/(1 - r)$

Series

C. Σ (sigma) notation

$$\sum_{1}^{n} r$$

- *r* = *n* disebut *upper limit. r* = 1 disebut lower limit. *r* sendiri adalah *index of summation.* Bentuk dari sigma notasi berfungsi untuk mempermudah penulisan *series*. Seperti contoh diatas, makna dari notasi diatas adalah 1 + 2 + 3 + … + n.

Series

- Sigma notasi ini memiliki beberapa *rules of summation* diantaranya:

$$\sum_{r=m}^{n} cUr = c\sum_{r=m}^{n} Ur$$

$$\sum (Ur \pm Vr) = \sum Ur \pm \sum Vr$$

$$\sum_{r=m}^{n} Ur = \sum_{1}^{n} Ur + \sum_{1}^{m-1} Ur$$

$$\sum_{r=1}^{n} a = a + a + a + a + \cdots + a = na$$

$$\sum_{r=m}^{n} a = (n-m+1)a$$

Series

- Lalu ada beberapa contoh penting dalam results untuk diingat seperti:

$$\sum_{r=1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Binomial Expansion

- Jika *n* adalah bilangan integer yang positif, maka:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{r} x^{n-r} y^r + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

Lalu diderivasikan menjadi:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} x^{n-r} y^r + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

Binomial Expansion

- Dari persamaan sebelumnya kita bisa menyimpulkan:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + nx^{n-1} + x^n$$

Atau jika kita mengganti *x* dengan –*x*:

$$(1-x)^n = 1 - nx + \binom{n}{2}x^2 - \binom{n}{3}x^3 + \cdots + n(-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n x^n$$

Mathematical Induction

- The use: Proving results and statements involving series or sequences.
- Steps:
  - Let P_n denotes (given in the question)
  - Verify that the smallest value of n in P_n is true
  - Assume *k* is true for some *k* (Hypothesis)
  - Show that P_{k+1} is true with the hypothesis from previous step. Show that the Left Hand Side is the same with the Right Hand one
  - Write down the conclusion

Mathematical Induction

Contoh:

Buktikan 1 + 3 + 5 + … + (2n -1) = n^2

Jawaban:

$$Pn \to 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \; for \; n \geq 1$$

$$Since \; 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{1}^{n}(2r-1), same \; as \; \sum_{1}^{n}(2r-1) = n^2$$

$$When \; n = 1; LHS = 1 \;\&\; RHS = 1. Therefore \; P_1 \; is \; true$$

$$Assume \; that \; P_k \; is \; true \; for \; some \; k \geq 1$$

$$Prove \; the \; P_{k+1} \; is \; true \to \sum_{r=1}^{k+1}(2r-1) = (k+1)^2$$

Mathematical Induction

$$LHS = \sum_{r=1}^{k+1}(2r-1) = \sum_{r=1}^{k}(2r-1) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1$$

$$RHS = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Since P_1 is true, and P_K is true which implies that P_{k+1} is true, by mathematical induction, P_n is true for all $n \geq 1$.